# LES SUITES

Deux semaines

## Table des matières

# ECUE

Cette feuille de TD constitue l'ECUE SR « Suites réelles »

# Motivation

Une suite est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (ou sur un sous-ensemble du type $[\![n_0, +\infty[\![$) et à valeurs réelles dans notre cas. La notion de suite permet d'étendre le concept de liste à des listes de longueur infinie, tout en gardant la propriété d'énumérabilité : pour un élément appartenant à la suite, on est capable de donner son rang et d'énumérer tous les éléments jusqu'à son rang.

Les suites apparaissent naturellement dans tout problème impliquant une itération dont on ne connait pas à priori le nombre d'étapes, ou dans ceux nécessitant une énumération possiblement infinie. Par exemples, l'écriture décimale d'un nombre s'apparente à une suite d'entiers, la dichotomie pour rechercher les zéros d'une fonction notamment approche un résultat par les termes d'une suite...

Les liens entre informatique et suites sont très étroits :

De nombreux phénomènes sont mesurés de manière cyclique : nombre d'étudiants à l'EPITA au cours d'une année scolaire, évolution de la population d'une ville, montant d'épargne, ... Les suites permettent de représenter mathématiquement ces phénomènes, de comprendre leur mécanisme d'évolution, de prédire leur tendance à long terme et éventuellement, tester l'impact d'outils de régulation. Grâce à l'informatique, on pourra stocker ces mesures, rechercher les liens entres les termes successifs, calculer l'évolution à long terme.

Les suites sont aussi utilisées pour approcher un résultat par étape, par exemple rechercher la solution d'une équation, ou étudier l'évolution d'une situation par étape (stochastique) : dans ces différents cas, on utilise des suites récurrentes. Les fonctions récursives de certains langages informatiques permettront de bien modéliser ces phénomènes.

Enfin, pour modéliser un phénomène, l'informaticien va souvent le discrétiser : c'est à dire le modéliser comme une suite de valeurs (exemple la pixelisation des images).

Pour toutes ces raisons, l'étude des suites est essentielle pour l'élève-ingénieur en informatique !

# Prérequis

- Déterminer une relation explicite ou une relation de récurrence pour modéliser une suite.
- Calculer les premiers termes d'une suite définie explicitement ou par récurrence.
- Pour les suites arithmétiques et géométriques, calculer le terme général, la somme de termes consécutifs, la monotonie.
- Conjecturer à partir d'exemples graphiques la limite d'une suite.

### Attendus

À la fin de ce chapitre, vous devez être capable de :

- Appliquer un raisonnement par récurrence pour établir une propriété d'une suite.
- Établir la convergence ou la divergence d'une suite usuelle définie explicitement, en utilisant des opérations sur les limites, des encadrements ou la monotonie.
- Reconnaitre des phénomènes d'évolution modélisables par une suite, spécifiquement : identifier les croissances de type arithmétique / géométrique, utiliser ces modèles pour étudier les phénomènes d'évolution de population, ou de taux d'intérêts etc.

# Première partie
# Révisions

## 1 Suites définies de façon explicite

### 1.1 Exercices

**Exercice 1.1**

Soit $(u_n)$ une suite réelle définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n^2 - 4n$

1. Calculer les termes de rangs 0 à 5 de la suite $(u_n)$.
2. Représenter ces termes sur le plan.
3. Étudier le sens de variation de $(u_n)$. La suite est-elle monotone ?
4. Calculer $u_{10}$ et $u_{100}$. À votre avis, comment se comporte cette suite en $+\infty$ ?

**Exercice 1.2**

Soit $(v_n)$ une suite réelle définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = 1 - \dfrac{1}{n}$

Reprendre les questions de l'exercice 1.1 pour cette suite.

## 2 Suites arithmétiques et géométriques

### 2.1 Exercices

**Exercice 2.3**

À quoi servent les suites ? ?

1. Matthieu souhaite participer à une course cycliste. Il commence à s'entrainer en parcourant 40 km la première semaine. Il prévoit ensuite d'augmenter cette distance de 5 km chaque semaine.
   (a) Modéliser cette situation en utilisant une suite numérique $(u_n)$.
   (b) Quelles formules permettent de déterminer la distance parcourue la 10 ème semaine ?
   (c) Quelles formules permettent de déterminer la distance parcourue de la première à la 10 ème semaine ?
2. À partir de 2023, on estime que le nombre de voitures électriques en circulation augmente de 12% par an. Dans la ville d'Arnac-la-poste, il y a au 1er janvier 2023 100 voitures électriques en circulation.
   (a) Modéliser cette situation en utilisant une suite numérique $(u_n)$.
   (b) Quelles formules permettent de connaitre le nombre de voitures électriques en 2050 ?
3. Quand vous aviez 1 an, votre chère mamie vous a ouvert un livret sur lequel elle a mis 100 euros. Ce livret rapporte 5% par an. Puis, à chacun de vos anniversaires suivants, elle a en plus ajouter 100 euros.
   (a) Modéliser cette situation en utilisant une suite numérique $(u_n)$.
   (b) Quelles formules permettent de savoir quelle est la somme sur le livret le lendemain de votre 18 ème anniversaire ?
4. Proposer d'autres situations de la vie courante dans lesquelles les suites peuvent être utiles.

**Exercice 2.4**

Dans cet exercice, $(u_n)$ est une suite arithmétique de raison $r$.
À partir des informations données, déterminer dans chaque cas l'expression de $u_n$ en fonction de $n$ et calculer la somme demandée.

1. $r = 2$ et $u_0 = -3$. Calculer $\sum_{k=0}^{7} u_k$
2. $r = 3$ et $u_3 = -1$. Calculer $\sum_{k=0}^{5} u_k$
3. $r = \frac{3}{2}$ et $u_4 = 9$. Calculer $\sum_{k=2}^{9} u_k$
4. **(Travail personnel)** $u_0 = 3$ et $u_1 = 7$. Calculer $\sum_{k=3}^{10} u_k$
5. **(Travail personnel)** $u_2 = 4$ et $u_6 = -1$. Calculer $\sum_{k=2}^{9} u_k$

**Exercice 2.5**

Dans cet exercice, $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q$.
À partir des informations données, déterminer dans chaque cas l'expression de $v_n$ en fonction de $n$, calculer la somme demandée et indiquer la façon dont la suite se comporte quand $n$ devient grand.

1. $q = 2$ et $v_0 = \frac{1}{2}$. Calculer $\sum_{k=0}^{7} v_k$
2. $q = 3$ et $v_2 = 18$. Calculer $\sum_{k=0}^{4} v_k$
3. $q = \frac{1}{2}$ et $v_5 = 1$. Calculer $\sum_{k=5}^{10} v_k$
4. **(Travail personnel)** $q = -1$ et $v_3 = 2$. Calculer $\sum_{k=0}^{5} v_k$
5. **(Travail personnel)** $q = -2$ et $v_0 = 1$. Calculer $\sum_{k=0}^{5} v_k$
6. **(Travail personnel)** $q = -\frac{1}{3}$ et $v_0 = 5$. Calculer $\sum_{k=2}^{5} v_k$

**Exercice 2.6**

Calculer les sommes suivantes en reconnaissant une suite arithmétique ou géométrique.

$S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 25$

$S_2 = 5 + 10 + 15 + \cdots + 50$

$S_3 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81$

$S_4 = 1 - 2 + 4 - 8 \cdots + 1024 - 2048$

**Exercice 2.7**

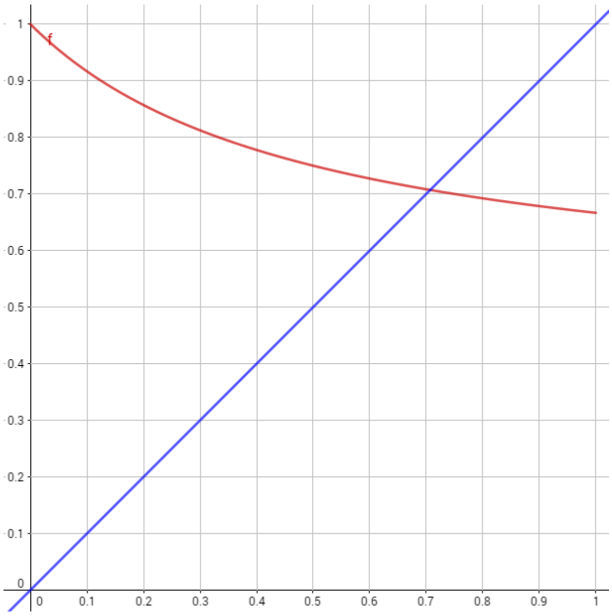
**(Travail personnel)** Reprendre l'exercice 2.3 et faire tous les calculs (sans calculette évidemment)

# 3 Autres suites récurrentes

## 3.1 Exercices

**Exercice 3.8**

Soient $f$ la fonction définie sur $I = [0, 1]$ par : $f(x) = \frac{1+x}{1+2x}$ et $(u_n)$ la suite : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$




1. Par une construction sur le graphique, positionner $u_0, u_1, u_2, u_3$ sur l'axe des abscisses.
2. La suite $(u_n)$ est-elle monotone ?
3. Comment se comporte les termes de la suite $(u_n)$ quand $n$ devient grand ?

## Deuxième partie
# Limite d'une suite

## 4 Opérations sur les limites

### 4.1 Exercices

**Exercice 4.9**

On considère deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ ainsi que deux réels $\ell$ et $\ell'$.

Remplir le tableau suivant (soyez le plus précis possible sur le signe des « 0 » ou le signe des « $\infty$ », écrire FI si la forme est indéterminée) :

Pour chaque « FI », vous donnerez deux exemples différents qui amènent à des limites différentes.

| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $\ell$ | $\ell > 0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $\ell < 0$ | $0^-$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ | $\ell' \neq 0$ | $-\infty$ | $\ell' < 0$ | $-\infty$ | $0^+$ | $0^-$ | $0^+$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$ | | | | | | | |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$ | | | | | | | |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$ | | | | | | | |

**Exercice 4.10**

En utilisant les règles des opérations sur les limites, déterminer la limite des suites suivantes :

1. $(u_n) : \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2 + 3n - 2$
2. $(v_n) : \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = -n^4 + 6$
3. $(w_n) : \forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{3}{2+\sqrt{n}}$
4. $(x_n) : \forall n \in \mathbb{N},\ x_n = -3 + \dfrac{5}{3+\sqrt{n}}$
5. $(y_n) : \forall n \in \mathbb{N},\ y_n = n \times 2^n$
6. $(z_n) : \forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n = \dfrac{n-3}{5+\frac{1}{n}}$

**Exercice 4.11**

En utilisant les règles des opérations sur les limites, déterminer la limite des suites suivantes. Identifier les cas d'indétermination et justifier soigneusement la façon de les lever, lorsque c'est possible.

1. $(a_n) : \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \left(n - \dfrac{1}{n}\right) \times \left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
2. $(b_n) : \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \left(n - \dfrac{1}{n}\right) \times \left(\dfrac{1}{n^2} - 5\right)$
3. $(c_n) : \forall n \in \mathbb{N},\ c_n = n^3 - 5n + 6$
4. $(d_n) : \forall n \in \mathbb{N}^*,\ d_n = \dfrac{6}{n} - 2n^2 + n^4$
5. $(e_n) : \forall n \in \mathbb{N},\ e_n = \dfrac{2n+5}{3+n}$
6. $(u_n) : \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n^2 + 5e^{-n}}{3+n}$
7. $(v_n) : \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{\sqrt{2n^2+5}}{3+n^2}$
8. $(x_n) : \forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \dfrac{n-3}{e^n}$
9. $(y_n) : \forall n \in \mathbb{N},\ y_n = 4^n - 5^n$
10. $(z_n) : \forall n \in \mathbb{N},\ z_n = e^{2n} - e^n$

**Exercice 4.12**

**(Travail personnel)** En utilisant les règles des opérations sur les limites, déterminer la limite des suites suivantes. Identifier les cas d'indétermination et justifier soigneusement la façon de les lever, lorsque c'est possible.

1. $(a_n) : \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \left(n - \dfrac{1}{n}\right) \times \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$
2. $(b_n) : \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \left(\dfrac{n-1}{2n+2}\right) \times \dfrac{1}{n^2}$
3. $(c_n) : \forall n \in \mathbb{N},\ c_n = 5\sqrt{n} - 7n^3 + 2n^2$
4. $(d_n) : \forall n \in \mathbb{N},\ d_n = \dfrac{6 + 2\sqrt{n}}{n + e^{-n}}$
5. $(u_n) : \forall n \in [\![6, +\infty[\![,\ u_n = \dfrac{5n + n^3}{5n - n^2}$
6. $(v_n) : \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{3^n}{2^n}$
7. $(x_n) : \forall n \in \mathbb{N},\ x_n = 4^n - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
8. $(y_n) : \forall n \in \mathbb{N},\ y_n = 3^n - 2^n$

# 5 Limites et comparaison

## 5.1 Exercices

**Exercice 5.13**

Soit $(u_n)$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -n - \sin(n)$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant -n + 1$
2. En déduire le comportement de $(u_n)$ en $+\infty$.

**Exercice 5.14**

Soit $(v_n)$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1}{n!}$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n}$
2. En déduire le comportement de $(v_n)$ en $+\infty$.

**Exercice 5.15**

Pour chacune des suites suivantes, donner un encadrement de la suite.
En déduire son comportement en $+\infty$, lorsque c'est possible.

1. $(u_n) : \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 10 - \dfrac{\sin(n)}{n^2}$
2. $(v_n) : \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{4n + (-1)^n}{2 + n}$
3. $(x_n) : \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = \dfrac{4 + \cos(n^2)}{5 + \frac{1}{n}}$
4. $(y_n) : \forall n \in \mathbb{N},\ y_n = (1 + (-1)^n)^n$

**(Travail personnel)**

$(w_n)$ : 5. $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{4n^2 + (-1)^n}{2 + n}$ 6. $(z_n) : \forall n \in \mathbb{N},\ z_n = \left(\dfrac{2 + \sin(n)}{4}\right)^n$

★ **Exercice 5.16**

Soit $(S_n)$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$

1. Pour tout entier $k$ non nul, donner un encadrement de $1 + \dfrac{1}{k}$ par deux entiers.
2. En déduire un encadrement de $S_n$ en fonction de $n$.
3. Déterminer le comportement de $(S_n)$ en $+\infty$.

**Exercice 5.17**

Soit $(u_n)$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n + 7}{2} \end{cases}$.

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant u_n \leqslant 7$

2. Étudier le sens de variation de $(u_n)$.
3. Que peut-on en déduire ?

**Exercice 5.18**

Soit $(u_n)$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 9 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2} \end{cases}$

1. (a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant u_n \leqslant 9$
   (b) Étudier le sens de variation de $(u_n)$.
   (c) Que peut-on en déduire ?
2. On étudie maintenant la suite $(v_n)$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - 1$
   (a) Montrer que $(v_n)$ est géométrique et déterminer sa raison.
   (b) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$ puis calculer la limite de $(v_n)$ en $+\infty$.
   (c) Quelle est la limite de $(u_n)$ en $+\infty$ ?

**Exercice 5.19**

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

1. Une suite strictement croissante a pour limite $+\infty$
2. Une suite bornée converge.
3. Une suite strictement croissante et bornée converge.
4. Une suite strictement croissante non bornée diverge.

**Exercice 5.20**

1. Soit $(u_n) = \left(\dfrac{1}{n+1}\right)$ et $(v_n)$ la suite définie par : $v_n = \dfrac{-2}{u_n}$.
   (a) Les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont-elles convergentes ? Justifier.
   (b) Les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont-elles bornées ? Justifier.
   (c) Montrer que $(u_n)$ est majorée par 1. La suite $(v_n)$ est-elle majorée par $-2$ ?
2. Soient $(a_n) = ((-1)^n)$, $(b_n) = (n+1)$, $(c_n) = \left(\dfrac{-2}{a_n}\right)$ et $(d_n) = \left(\dfrac{-2}{b_n}\right)$.

   Étudier la convergence de ces 4 suites.
3. Soit $(u_n)$ une suite réelle qui ne s'annule pas et $(v_n)$ la suite définie par : $v_n = \dfrac{-2}{u_n}$.

   Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

   (a) Si $(u_n)$ converge, $(v_n)$ converge aussi.
   (b) Si $(u_n)$ est bornée, $(v_n)$ est bornée.
   (c) Si $(u_n)$ est minorée par 1, $(v_n)$ est majorée par $-2$.
   (d) Si $(u_n)$ est divergente, $(v_n)$ converge vers 0.